經濟論叢

第105巻　第1·2·3号

昭和45年1・2・3月

京都大學經濟學會

倉庫問題の解法と最適決定の構造

小 林 清 晃

I はじめに

線型計画法の1つの問題であるいわゆる倉庫問題 (warehouse problem) の解法およびその最適決定の構造を検討し，さらに一般化したモデルの定式化とその解法について考察するのが本稿の目的である。第2節で明らかにされるように，倉庫問題の数学的構造はいわゆる一般化された輸送問題 (generalized transportation problem) と著しい類似性をもっているが，その間の関連性についてのより進んだ考察については別の機会に行なう。

II 倉庫問題の定式化

単一種類の商品についての倉庫問題は最初に Cahn によって次のような問題として与えられた。「容量一定の倉庫と，価格と費用の季節変動がわかっているある商品の初期在庫量が与えられている。またその商品の発注から納入までの時間的な遅れが定められている。このとき与えられた一定期間における利益を最大にする購入，在庫，販売の最適計画はどのようなものか[1]」

この倉庫問題を定式化するためにまず以下の如く仮定と記号の意味を明確にしておきたい。

(1) 単一種類の商品を対象にする。

(2) 商品は在庫中腐ることはない。

(3) 倉庫は一定の容量 B をもつ。

(4) 初期在庫量は A である。 $0 \leqq A \leqq B$

1) Cahn [4], p. 1073.

(5)　発注と納入との間の遅れを1期間と仮定する。すなわち，発注は期首になされ，納入は期末になされるものとみなす。

(6)　t 期における発注量を x_t，販売量を y_t とする。　$t=1, 2, \ldots\ldots, n$

(7)　t 期における購入価格は c_t とし，販売価格は p_t とする。 c_t, p_t $(t=1, 2, \ldots\ldots, n)$ は既知であるとする。

(8)　在庫費用は無視する。

この問題の定式化が，線型計画法に適しており，さらに特殊な構造の行列をもつことが以下で明らかにされるであろう。

具体的に，倉庫問題は次のように述べることができる。図 2—1 に示すように，全体の容量が B で，時刻 $t=0$ に A 単位の製品を在庫している倉庫がある。$x(t-\varDelta)$ を，時刻 $t-\varDelta$ に発注した製品の総量とする。ここで $\varDelta$ は発注と納入との間の時間的遅れであり，したがって，時刻 $t-\varDelta$ に発注した製品は時刻 t に倉庫に到着する。支払いは発注時の購入価格でなされるものとする。$y(t)$ と $p(t)$ をそれぞれ販売量と販売価格としよう。 A, B, $\varDelta$, $c(t)$, $p(t)$ が与えられると， 問題は与えられた時間内での利益を最大にするように $x(t)$ と $y(t)$ を決定することである。1期間の販売量はゼロから B まで自由にきめられるとしよう。

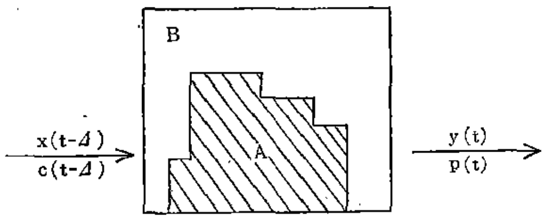

図 2—1

これは明らかにダイナミックな問題であるから，扱っている期間をいくつかの区間に分ける。この区間は $x(t)$, $y(t)$, $c(t)$, $p(t)$ がその区間内では一定であると考えられるように十分小さいものと仮定する。さらに，仮定(5)によって $\varDelta=1$ である。

倉庫の容量に限界があることから，購入可能量の制約と販売可能量の制約が

生じる。すなわち，購入面では，第 i 期末の在庫量が B を越えることはできないという制約が加えられる。初期在庫量が A で，第 j 期における在庫量の純増加分は x_j-y_j（正であれば在庫増，負であれば在庫減）であるから，購入面での制約条件は，

$$(2\text{-}1) \qquad A+\sum_{j=1}^{i}(x_j-y_j) \leqq B \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$$

となる。

さらに，i 期における販売量の合計は第 $i-1$ 期末の在庫量を越えることはできないから，販売面での制約条件は，

$$(2\text{-}2) \qquad y_i \leqq A+\sum_{j=1}^{i-1}(x_j-y_j) \qquad i=2,\ \ldots\ldots,\ n$$

で与えられる。ここで $i=1$ のときには，

$$(2\text{-}3) \qquad y_1 \leq A$$

である。x_j, y_j は明らかに，

$$(2\text{-}4) \qquad x_j \geqq 0,\ y_j \geqq 0 \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$$

目的関数としての利潤 Π は

$$(2\text{-}5) \qquad \Pi=\sum_{j=1}^{n}(p_jy_j-c_jx_j) \rightarrow \max.$$

となる。われわれの問題は (2–1)〜(2–4) の制約条件のもとで，Π を最大にするという典型的な線型計画法の問題になる。

この問題の係数行列がどのような構造をもっているかをみるために，変数を左辺へ，制約定数項を右辺へ集めて整理すれば，(2–1)，(2–2) の制約条件は

$$(2\text{-}1)' \qquad \sum_{j=1}^{i} x_j-\sum_{j=1}^{i} y_j \leqq B-A \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$$

$$(2\text{-}2)' \qquad -\sum_{j=1}^{i-1} x_j+\sum_{j=1}^{i} y_j \leqq A \qquad i=2,\ \ldots\ldots,\ n$$

と変形される。かくて，(2–1)′，(2–2)′，(2–3) の制約条件を個々に書き下せば以下のようになる。

$$
(2\text{-}6)\quad
\left\{
\begin{array}{lll}
x_1 & -y_1 & \leqq B-A \\
x_1+x_2 & -y_1-y_2 & \leqq B-A \\
x_1+x_2+x_3 & -y_1-y_2-y_3 & \leqq B-A \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n & -y_1-y_2-y_3-\cdots\cdots-y_n & \leqq B-A \\
 & y_1 & \leqq A \\
-x_1 & y_1+y_2 & \leqq A \\
-x_1-x_2 & y_1+y_2+y_3 & \leqq A \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
-x_1-x_2-x_3-\cdots-x_{n-1} & +y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n & \leqq A
\end{array}
\right.
$$

さらに，これらを行列形式に書けば下の (2-7) のように極めて特徴的な構造をもっていることがわかる。

$$
(2\text{-}7)\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|cccc}
x_1 & x_2 & x_3\cdots\cdots & x_{n-1} & x_n & y_1 & y_2 & y_3\cdots\cdots & y_n
\end{array} \\
\left(
\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & 0\cdots\cdots & & 0 & -1 & 0 & 0\cdots & 0 \\
1 & 1 & 0\cdots\cdots & & 0 & -1 & -1 & 0\cdots & 0 \\
1 & 1 & 1\cdots\cdots & & 0 & -1 & -1 & -1\cdots & 0 \\
\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots \\
1 & 1 & 1\cdots\cdots & & 1 & -1 & -1 & -1\cdots & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0\cdots\cdots & & 0 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 \\
-1 & 0 & 0\cdots\cdots & & 0 & 1 & 1 & 0\cdots & 0 \\
-1 & -1 & 1\cdots\cdots & & 0 & 1 & 1 & 1\cdots & 0 \\
\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots \\
-1 & -1 & -1\cdots & -1 & 0 & 1 & 1 & 1\cdots & 1
\end{array}
\right)
\begin{array}{l}
\leqq B-A \\ \leqq B-A \\ \leqq B-A \\ \cdots\cdots \\ \leqq B-A \\ \leqq A \\ \leqq A \\ \leqq A \\ \cdots\cdots \\ \leqq A
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc|cccc}
-c_1 & -c_2 & -c_3\cdots & -c_{n-1} & -c_n & p_1 & p_2 & p_3\cdots & p_n
\end{array}
\end{array}
$$

係数行列は三角行列のサブ・ブロックから成り立っており，それは問題がダイナミックな状況を示すことを典型的に物語っている。

III 双対体系への変換

われわれは問題の数学的定式化を (2–7) のように視覚的に表現することによって，倉庫問題の双対問題へは容易に到達する。(2–1) の n 個の制約条件，いいかえれば，(2–7) の上半分に対応する双体変数を u_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ とおく。また，(2–3) および (2–2) の n 個の制約条件，すなわち (2–7) の下半分に対応する双対変数を v_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ とおく。かくて，双対問題は以下のように示される。

$$(3\text{–}1) \qquad \sum_{i=k}^{n} u_i - \sum_{i=k+1}^{n} v_i \geqq -c_k \qquad k=1, 2, \ldots\ldots, n-1$$

$$(3\text{–}2) \qquad u_n \geqq -c_n$$

$$(3\text{–}3) \qquad -\sum_{i=k}^{n} u_i + \sum_{i=k}^{n} v_i \geqq p_k \qquad k=1, 2, \ldots\ldots, n$$

$$(3\text{–}4) \qquad u_k \geqq 0, \ v_k \geqq 0 \qquad k=1, 2, \ldots\ldots, n$$

の制約条件のもとで，目的関数

$$(3\text{–}5) \qquad Z=(B-A)\sum_{i=1}^{n} u_i + A\sum_{i=1}^{n} v_i$$

を最小にせよ。これが標準的な倉庫問題 (2–1)～(2–5) に対する双対体系である。

IV Charnes–Cooper の開発による解法

Charnes と Cooper は Cahn の与えた標準的な倉庫問題に極めて有効な解法を示した[2]。その方法のユニークな点を一口でいうならば，双対問題を多段階決定過程の問題に変換あるいは再定式化するところにある。本節では，Charnes-Cooper の線に沿って解法を示すことにする。

新しい変数 U_k, V_k を次のように定義する。

2） その解法についての厳密な数学的基礎づけは Charnes & Cooper 〔5〕 で与えられたのであるが，この文献については筆者は未見である。しかし，その輪郭は Charnes & Cooper 〔6〕 あるいは Garvin 〔7〕 で知ることができる。

(4-1)　　$U_k=\sum_{i=k}^{n} u_i$　　　$k=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n$

(4-2)　　$V_k=\sum_{i=k}^{n} v_i$　　　$k=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n$

u_k, v_k が非負であることから，もちろん U_k, V_k も非負である。さらに，$u_{k-1}=U_{k-1}-U_k$, $v_k=V_{k-1}-V_k$ であるから，

$$U_{k-1}\geqq U_k \qquad k=2,\ 3,\ \dots\dots,\ n$$

$$V_{k-1}\geqq V_k \qquad k=2,\ 3,\ \dots\dots,\ n$$

でなければならない。新しい変数 U_k, V_k によって前節の (3-1)～(3-4) と同値な制約条件は次のように表現される。

(4-3)　　$U_k-V_{k+1}\geqq -c_k$　　　$k=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n-1$

(4-4)　　$U_n\geqq -c_n$

(4-5)　　$-U_k+V_k\geqq p_k$　　　$k=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n$

(4-6)　　$U_{k-1}\geqq U_k,\ V_{k-1}\geqq V_k$　　　$k=2,\ 3,\ \dots\dots,\ n$

(4-7)　　$U_k\geqq 0,\ V_k\geqq 0$　　　$k=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n$

一方，目的関数 (3-5) は

(4-8)　　$Z=(B-A)U_1+AV_1\rightarrow \min$

と変形される。そこで，問題は (4-3)～(4-7) という制約条件のもとで (4-8) を最小にするような U_k, V_k ($k=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n$) を求めよ，ということになる。

いま，U_1 と V_1 を除いたすべての U_k と V_k の最適解が得られたと仮定しよう。そうすると，決定すべき U_1 と V_1 に対する制約条件は次のようになる。

(4-9)　$$\begin{cases} U_1-V_2\geqq -c_1 \\ -U_1+V_1\geqq p_1 \\ U_1\geqq U_2,\ V_1\geqq V_2 \\ U_1\geqq 0,\quad V_1\geqq 0 \end{cases}$$

U_1, V_1 を除いたすべての U_k, V_k の値が決定済みであるから，問題全体の最適解を得るためには，(4-9) の制約条件のもとで，(4-8) を最小にするよう

な U_1, V_1 を求めればよいことになる。 U_1-V_1 平面に (4–9) の領域を図示すれば図 4—1 a, b, c, d のようになる (斜線部分)。

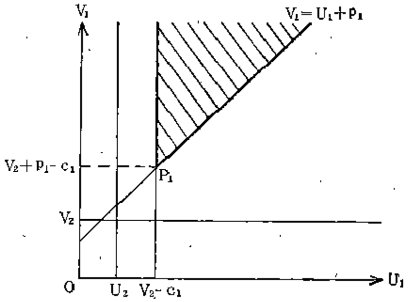

図 4—1 a $\begin{pmatrix} p_1-c_1\geqq 0 \\ U_2\leqq V_2-c_1 \end{pmatrix}$

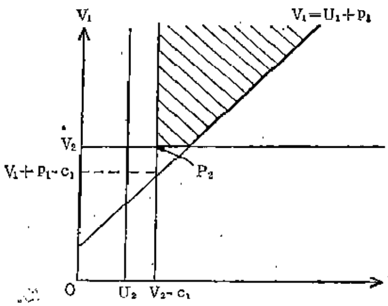

図 4—1 b $\begin{pmatrix} p_1-c_1<0 \\ U_2\leqq V_2-c_1 \end{pmatrix}$

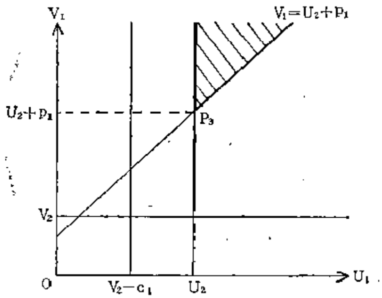

図 4—1 c $\begin{pmatrix} U_2+p_1\geqq V_2 \\ U_2\geqq V_2-c_1 \end{pmatrix}$

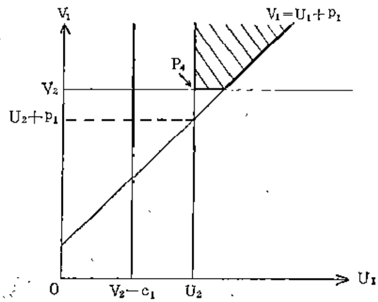

図 4—1 d $\begin{pmatrix} U_2+p_1<V_2 \\ U_2\geqq V_2-c_1 \end{pmatrix}$

4通りの可能なグラフが描かれるが, 最小にすべき目的関数 $Z=(B-A)U_1+AV_1$ を U_1-V_1 平面に図示すれば, $B-A>0$ のときには, 負の勾配をもつ直線になり, また $B-A=0$ のときには, U_1 軸に平行な直線になる。したがって, いずれの場合でも, z を最小にするには, 各図の可能領域のうちで, できるだけ左下の端点を選べばよいことになる。すなわち, 最適点は以下のようになる。

a のケース　　点 P_1

b のケース　点 P_2

c のケース　点 P_3

d のケース　点 P_4

結局，U_1 と V_1 を除いたすべての U_k, V_k の最適解が求まったと仮定して，(4-9) のもとで (4-8) を最小にする問題は U_1 と V_1 をできるだけ小さくすることと同値である。

(4-3)〜(4-8) の最適解が求まり，第1期末における在庫量が A' であることがわかったと仮定しよう。ここで，初期在庫量が A' になったことと，残りの $n-1$ 期間について最適化するという点を除けば，他のことについてはすべて前と同じ新たな問題に到る。つまり，この新たな問題は次のように与えられる。

$$
(4\text{-}10)\quad
\begin{cases}
U_k'-V_{k+1}'\geqq -c_k & k=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n\\
U_n'\geqq -c_n & \\
-U_k'+V_k'\geqq p_k & k=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n\\
U_{k-1}'\geqq U_k',\ V_{k-1}'\geqq V_k' & k=3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ n\\
V_k'\geqq 0,\ V_k'\geqq 0 & k=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n\\
Z'=(B-A')U_2'+A'V_2'\to \min &
\end{cases}
$$

ここでまた，前の考え方をそのまま繰返すと，(4-10) の最適解は U_2' と V_2' をできるだけ小さくすることによって得られることになる。さらに，A' の値は，全体としての問題 (4-3)〜(4-8) が最適解になるように決定されているから，最適な第1期の決定をした後の残りの $n-1$ 期間の最適化問題 (4-10) の最適解は (4-3)〜(4-8) の最適解と一致しなければならない。したがって，$U_k'=U_k$, $V_k'=V_k$ であり，(4-3)〜(4-8) の最適解は U_2 と V_2 をできるだけ小さくすることによって得られることがわかる。

以上の手順を繰り返せば，(4-3)〜(4-8) の問題は，すべての U_k と V_k をできるだけ小さくすることによって，最適解に到達することになる。

具体的な解法の手順は以下の step のように第 n 期から第 $n-1$ 期へ……，第2期から初期へと，活動を逆にさかのぼっていけばよい。

step 1 (4–4) の条件より，$U_n \geqq -c_n$。また，U_n は非負であることから，U_n のとり得る最小値は

$$U_n = \max(-c_n, 0)$$

となる。

step 2 (4–5) の条件より $V_n \geqq U_n + p_n$。また，V_n は非負であるから，V_n のとり得る最小値は

$$V_n = \max(U_n + p_n, 0)$$

である。

step 3 (4–3) と (4–6) より $U_{n-1} \geqq V_n - c_{n-1}$，$U_{n-1} \geqq U_n$。さらに，$U_{n-1}$ も非負であるから，U_{n-1} のとり得る最小値は

$$U_{n-1} = \max(V_n - c_{n-1}, U_n, 0)$$

である。

step 4 (4–5) より $V_{n-1} \geqq U_{n-1} + p_{n-1}$ (4–6) より $V_{n-1} \geqq V_n$。V_{n-1} も非負であるから，V_{n-1} のとり得る最小値は

$$V_{n-1} = \max(U_{n-1} + p_{n-1}, V_n, 0)$$

である。

step 5 step 3 と同じ考え方により，U_{n-2} の最小値は次式で与えられる。

$$U_{n-2} = \max(V_{n-1} - c_{n-2}, U_{n-1}, 0)$$

step 6 step 4 と同じようにして，V_{n-2} の最小値は次式で与えられる。

$$V_{n-2} = \max(U_{n-2} + p_{n-2}, V_{n-1}, 0)$$

以上の各 step から，U_k，V_k の最小値すなわち最適値を求める一般的な方法は以下の如くである。

(4–11) $U_n = \max(-c_n, 0)$

(4–12) $V_n = \max(U_n + p_n, 0)$

(4–13) $U_k = \max(V_{k+1} - c_k, U_{k+1}, 0)$，$k = n-1, n-2, \ldots\ldots, 2, 1$

(4–14) $V_k = \max(U_k + p_k, V_{k+1}, 0)$，$k = n-1, n-2, \ldots\ldots, 2, 1$

U_n，V_n から U_1，V_1 へと再帰的に決定していく (4–11)〜(4–14) のプロセ

スを図式的に表現すれば図 4–2 のように示される[3]。 2つのインプット z_1 と z_2 をもち， $\max(z_1, z_2)$ をアウトプットする変換をボックスであらわしている。ボックス内の記号はそこからのアウトプットを示している。

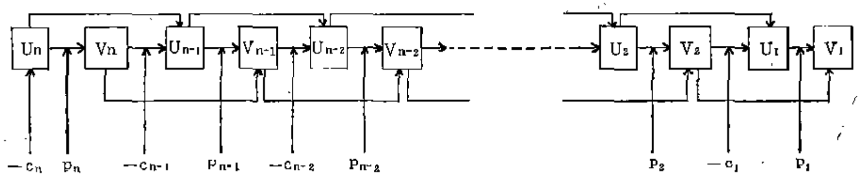

図 4—2

(4–11)～(4–14) で決定された U_1, V_1 を (4–8) の目的関数に代入すれば Z の最小値が得られる。しかし，われわれの問題は (2–1)～(2–5) で与えられたもとの問題を解くことである。この点，(2–5) の Π の最大値は双対定理により Z の最小値に等しいことがいえるから， 残っていることは x_i, y_i の最適値を求めることである。

U_1 と V_1 の決定プロセス (4–11)～(4–14) から明らかなように，U_1 と V_1 はともに p_i の和と $-c_i$ の和から成り立っている。したがって，U_1 と V_1 の求められた値を Z に代入すれば，Z は

(4–15)　$$Z=(B-A)U_1+AV_1 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i c_i$$

となり，$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ の 1 次結合であらわされる。

一方，もとの問題の目的関数 Π は，既知のデータ $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ の 1 次結合と解釈され，その 1 次結合における未知の係数が x_i, y_i であるとみなすことができる。 ここで， 前述したように最適解においては $\Pi=Z$ である故，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i c_i=\sum_{i=1}^{n}y_i p_i-\sum_{i=1}^{n}x_i c_i$$

3)　図 4–2 のフロー・チャートは Garvin 〔7〕, p. 266 による。

$$\therefore \quad =\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-y_i)p_i-\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-x_i)c_i=0$$

となる。上式は p_i, c_i がいかなる値であろうとも恒等的に成立しなければならないから，

$$(4\text{–}16) \qquad \begin{matrix} x_i=\beta_i \\ y_i=\alpha_i \end{matrix} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$$

を得る。α_i, β_i は（4–15）の係数として求められておれば，結局，（4–16）が最適な x_i, y_i を与えることになる[4]。

V 最適決定の構造について

本節では，与件として与えられている購入価格と販売価格の変動にいろいろな仮定を付した場合に，倉庫問題についての最適決定あるいは最適政策がどのような構造的特徴をもっているかを考察する。ただし，以下では現実的意味からして $c_k>0$, $p_k>0$ とみなすことにする。

case 1 $\quad c_k>p_k>c_{k-1} \qquad k=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$

すなわち，いかなる期の販売価格も前期の購入価格より大きく当期の購入価格より小さい場合である。まず，この仮定のもとにおける最適決定を求めるために（4–11）～(4–14) のプロセスを繰り返す。

$$\begin{array}{ll}
U_n=0 & V_n=P_n \\
U_{n-1}=\max(p_n-c_{n-1},\ 0)=p_n-c_{n-1}, & V_{n-1}=\max\ (p_n-c_{n-1}+p_{n-1},\ p_n,\ 0)=p_n \\
U_{n-2}=\max(p_n-c_{n-2},\ p_n-c_{n-1},\ 0) & V_{n-2}=\max\ (p_n-c_{n-2}+p_{n-2},\ p_n,\ 0) \\
\quad =p_n-c_{n-2} & \quad =p_n \\
\vdots & \vdots \\
U_k=p_n-c_k & V_k=p_n \\
\vdots & \vdots \\
U_1=p_n-c_1 & V_1=p_n
\end{array}$$

かくて，（4–15）は

$$Z=Bp_n-(B-A)c_1$$

4） このあたりの数学的に厳密な証明は Charnes & Cooper〔5〕によって“principle of regrouping”として与えられている。

となり，（4–16）から，

$$(5\text{–}1)\quad \begin{cases} x_1=B-A, & y_n=B \\ x_k=0\ (k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n), & y_k=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \end{cases}$$

が最適決定となる。

（5–1）は次のことを意味している。初期において倉庫を満杯にするように購入し，その後最終期にいたるまで購入・販売については何もせず，最終期に倉庫内の製品を全て販売する。

case 2　$c_k<p_k<c_{k-1}$　$k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$

すなわち，case 1 とはまったく逆で，いかなる期の販売価格も前期の購入価格より小さく当期の購入価格より大きい場合である。（4–11)～(4–14）から，

$$\begin{array}{ll} U_n=0 & V_n=p_n \\ U_{n-1}=\max\,(p_n-c_{n-1},\ 0) & V_{n-1}=\max\,(p_{n-1},\ p_n,\ 0)=p_{n-1} \\ \quad =0 & \vdots \\ \vdots & \\ U_k=0 & V_k=p_k \\ \vdots & \vdots \\ U_1=0 & V_1=p_1 \end{array}$$

かくて，$Z=Ap_1$ となり，最適決定は

$$(5\text{–}2)\quad \begin{cases} x_k=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n), & y_1=A \\ & y_k=0\ (k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n) \end{cases}$$

となる。すなわち，計画期間にわたってまったく購入を行なわず，最終期に倉庫内の初期在庫をすべて販売することが最適政策である。

上記の case 1, 2 以外の価格変動の状況では，問題のシステムがかなり複雑になり，最適決定の構造的特徴を単純に述べることはできない。けれども次の 2 点は結論的に指摘されるだろう。

（5–3）　各段階（あるいは各期）における最適決定は，倉庫を満杯にするか空にするかのいずれかである。

（5–4）　各段階における最適決定は購入価格および販売価格のみによって影響される。

前者は次の事実から明らかである。すなわち，（4–15）から，p_i-c_i の係数は B, $(B-A)$, A のいずれかであり，したがって，y_i, x_i は B, $(B-A)$, A のいずれかの値をとることがわかる。さらに厳密にいうならば，x_1 は B か $(B-A)$ のいずれかの値をとり，y_i は B か A のいずれかに等しくなる[5]。また，（5–4）は（4–11）～（4–14）の決定プロセスから明らかであろう。

VI 動的計画法による解法

動的計画法の開発者 R. Bellman は Cahn の提示した倉庫問題に動的計画法のアプローチによる解法を与えた[6]。

動的計画法の理論的基礎は次に述べる最適性の原理（principle of optimality）[7]にある。

<u>最適性の原理</u>　最適政策は，システムの初期の状態と初期におこなわれた決定がどのようなものであっても，残りの決定が，初期の決定から結果する状態に関して，必ず最適政策を構成するような性質をもつ。

図6—1で示される多段階の決定過程を考えよう。任意の第 i 段階において，決定変数 x_i を決めればプロセスの状態変数[8] q_i は

（6–1）　$q_{i+1}=F(q_i,\ x_i)$

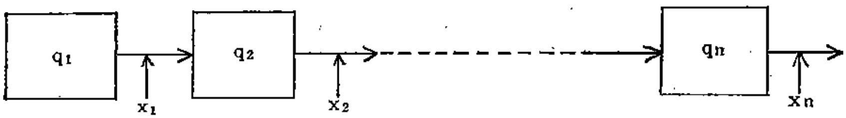

図 6—1

という変換を受けるとしよう。したがって，n 段階のすべての決定変数 x_1, x_2, ……, x_n を決定すれば，状態変数は $q_1\rightarrow q_2\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow q_{n+1}$ と順次変換が

5） この点についての証明は数学的帰納法によるが，ここでは省略する。
6） Bellman〔3〕.
7） Bellman〔2〕, p. 83.
8） プロセスの状態を定量的に記述する変数を状態変数と呼び，状態変数を変化させ得る操作可能な変数を決定変数という。

定まる。いま，n 段階の多段決定過程において，関数

(6–2)　　$Q=h(q_1,\ x_1)+h(q_2,\ x_2)+\cdots\cdots+h(q_n,\ x_n)$

を最大にすることを考えよう。Q を最大にする決定変数の最適解が $x_1{}^*$, $x_2{}^*$, ……, $x_n{}^*$ であるとすれば，それらの最適解を Q に代入して得られる値は，プロセスの初期状態 q_1 と段階数 n のみによる関数である。この関数を

$$f_n(q_1)=\max_{x_1}\cdot\max_{x_2}\cdot\cdots\max_{x_n}\Big[h(q_1,\ x_1)+h(q_2,\ x_2)+\cdots+h(q_n,\ x_n)\Big]$$

と定義すれば，結局，$f_n(q_1)$ は

$$f_n(q_1)=\max_{x_1}\Big[h(q_1,\ x_1)+\max_{x_2}\cdot\max_{x_3}\cdots\cdots\max_{x_n}\Big\{h(q_2,\ x_2)$$

$$+h(q_3,\ x_3)+\cdots\cdots+h(q_n,\ x_n)\Big\}\Big]$$

となる。ところで，上式の右辺第2項の q_2 を初期状態として $n-1$ 段階のプロセスから得られる Q の最大値を意味する。したがって，

(6–3)　　$f_n(q_1)=\max\limits_{x_1}\Big[h(q_1,\ x_1)+f_{n-1}(q_2)\Big]$

となる。この (6–3) が動的計画法における関数方程式 (functional equation) と呼ばれ，最適性の原理を数式的に表現するものである。

以下では，関数方程式の手法による Bellman の解法に従って，動的計画法の倉庫問題への適用を示したい。ただし，Bellman のオリジナルの論文には若干のミスリーディングがあるので，その点の訂正を加えておく。

記号は従来通りとする。最大にすべき目的関数

$$\varPi=\sum_{j=1}^{n}(p_jy_j-c_jx_j)$$

が，さきに述べた関数 $Q=\sum\limits_{j=1}^{n}h(q_j,\ x_j)$ に対応する。ただし，われわれの倉庫問題では決定変数は x_j と y_j の2変数から成り立っていることを注意したい。

最大利潤 $\max\varPi$ は，初期在庫量 A とプロセスの段階数 n の関数であることは明らかであろう。したがって，

(6–4)　　$f_n(A)=\max\varPi$

を制約条件をみたす可能な x_j, y_j についての最大値と定義する。（6-4）において初期の在庫量 A が初期の状態変数 q_1 に対応している。いま，段階数 $n=1$ のときには，

$$(6\text{-}5)\qquad f_1(A)=\max\,(p_1y_1-c_1x_1)$$

となり，ここで，x_1, y_1 は次の制約条件をみたさなければならない。

$$(6\text{-}6)\qquad \begin{cases} y_1 \leqq A \\ x_1-y_1 \leqq B-A \\ x_1 \geqq 0,\ \ y_1 \geqq 0 \end{cases}$$

明らかに（6-6）の制約条件のもとでは

$$f_1(A)=p_1A$$

になる。

さて次に，$f_{n-1}(A)$ と $f_n(A)$ との間の再帰的関係を求めなければならない。もし，x_1 と y_1 が決定すれば，残りの変数についての制約条件は (2-1)～(2-4) から次のようになる。

$$(6\text{-}7)\qquad \sum_{j=2}^{i}(x_j-y_j) \leqq B-(A+x_1-y_1) \qquad i=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$$

$$(6\text{-}8)\qquad y_2 \leqq A+x_1-y_1$$

$$(6\text{-}9)\qquad y_i \leqq A+x_1-y_1+\sum_{j=1}^{i-1}(x_j-y_j) \qquad i=3,\ \ldots\ldots,\ n$$

$$(6\text{-}10)\qquad x_j \geqq 0,\ y_j \geqq 0$$

(6-7) の右辺が (6-1)～(6-3) における状態変数 q_2 に対応することは容易に理解されよう[9]。かくて，$f_{n-1}(A)$ と $f_n(A)$ との再帰的関係として

$$(6\text{-}11)\qquad f_n(A)=\max_{x_1,\,y_1}\Big[p_1y_1-c_1y_1+f_{n-1}(A+x_1-y_1)\Big]$$

を得る。ここで，x_1-y_1 は（6-6）の制約条件をみたさなければならないことを忘れてはいけない。（6-11）がわれわれの倉庫問題を動的計画法によって定式化したときの関数方程式である。

9) したがって，$q_{i+1}=B-\Big[(A+\sum_{j=1}^{i}x_j-y_j)\Big]$ がプロセスの変換（6—1）に対応する。

さて，関数方程式を設定すれば，あとは動的計画法の逐次計算を施せばよい。ただし，決定変数が2次元の可能領域にあることが，若干，計算を複雑にする。その反面，プロセスが線型（linearity）であることがかなりの救いになる。それらを考慮した上で，以下において，解への方向を一層しぼることにしよう。

（6-6）の制約条件をグラフで表現すれば図6—1のようになる。すなわち，第1象限において，直線 $y_1=A$ 上を含めてそれよりも下の部分，直線 $x_1-y_1=B-A$ 上を含めてそれよりも上の部分。それらの共通部分が制約条件（6-6）をみたす可能領域である。つまり，多角形 $OP_1P_2P_3$ が解の存在する可能領域を構成する。ここで，各端点の座標は，

$$O\,(0,\ 0),\ P_1(B-A,\ 0),\ P_2(B,\ A),\ P_3(0,\ A)$$

である[10]。

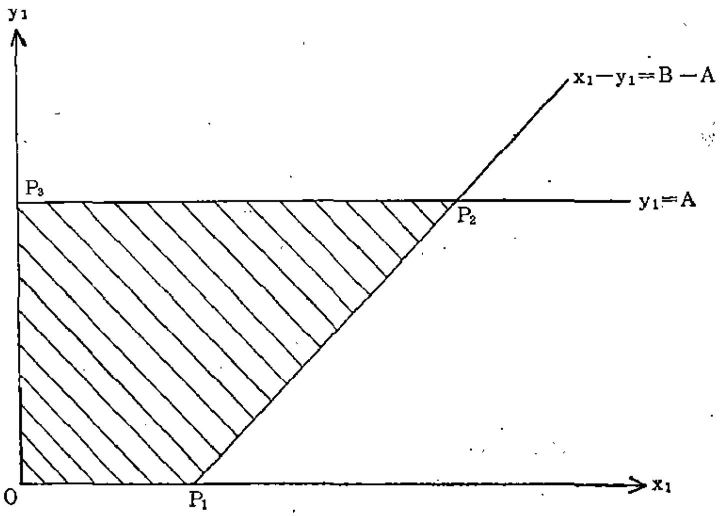

図 6—1

10） Bellman〔3〕では図に誤りがあり，しかも，考慮する必要のない端点を，最適点となり得るものとしてもちこんでいる。

プロセスがすべて線型であることから，プロセスの各段階は個々の線型計画法の問題に相当する。したがって，制約条件（6–6）のもとで（6–11）の得る方法については線型計画法における重要な定理

「可能領域である凸集合のいずれかの端点が最適解を与える」

を適用すればよい。かくて，上記の4つの端点 O, P_1, P_2, P_3 のいずれかにおいて，（6–11）の $f_n(A)$ の値が得られるであろう。

$$(6\text{–}12) \qquad p_1y_1-c_1x_1+f_{n-1}(A+x_1-y_1)=\begin{cases} f_{n-1}(A) & \text{端点 } O \\ -c_1(B-A)+f_{n-1}(B) & \text{端点 } P_1 \\ p_1A-c_1B+f_{n-1}(B) & \text{端点 } P_2 \\ p_1A+f_{n-1}(0) & \text{端点 } P_3 \end{cases}$$

（6–12）から，（6–11）の関数方程式は，$A \geqq 0$ に対して，

$$f_n(A)=\max\begin{pmatrix} f_{n-1}(A), \\ -c_1(B-A)+fn_{-1}(B), \\ p_1A-c_1B+f_{n-1}(B), \\ p_1A+f_{n-1}(0) \end{pmatrix}$$

となる[11]。

以下残りの $n-1$ 段階についても同様の手続きを逐次繰り返していけばよい。

VII より一般化されたモデル

本節では，Cahn によって定式化された標準的な倉庫問題の中に，さらに一つの費用項目として，倉庫費用あるいは在庫管理費用を含めたモデルを定式化する。勿論，このモデルはCahn の倉庫問題を特殊ケースとして含むものであり，その意味で若干一般化されたモデルであると云える。前節までの記号に加えて，あらたに以下の記号を定義しよう。

r_i：第 i 期における製品1単位当りの倉庫費用

z_i：第 i 期間中における在庫量（既に発注したものを購入済みであるとする）

11） ただし，$A<0$ のときには，$f_n(A)=0$ とする。

s_i：第 i 期末における在庫量

制約条件は次の如くである。第 i 期間中の在庫量は，その前期末における在庫量から，第 i 期の販売量を引いたものに等しい。

(7-1)　　$z_i = s_{i-1} - y_i$　　$i=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$

特に，第1期間中の在庫量は，初期ストックから第1期の販売量を引いたものに等しい。

(7-2)　　$z_1 = A - y_1$

第 i 期末の在庫量は，その期間中の在庫量にその期の購入量を加えたものに等しくなければならない。

(7-3)　　$s_i = z_i + x_i$　　$i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$

各期末の在庫量は倉庫のキャパシティ以下でなければならない。

(7-4)　　$s_i \leqq B$　　$i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$

変数はすべて非負である。

(7-5)　　$x_i \geqq 0,\ y_i \geqq \geqq 0,\ z_i \geqq 0,\ s_i \geqq 0$　　$i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$

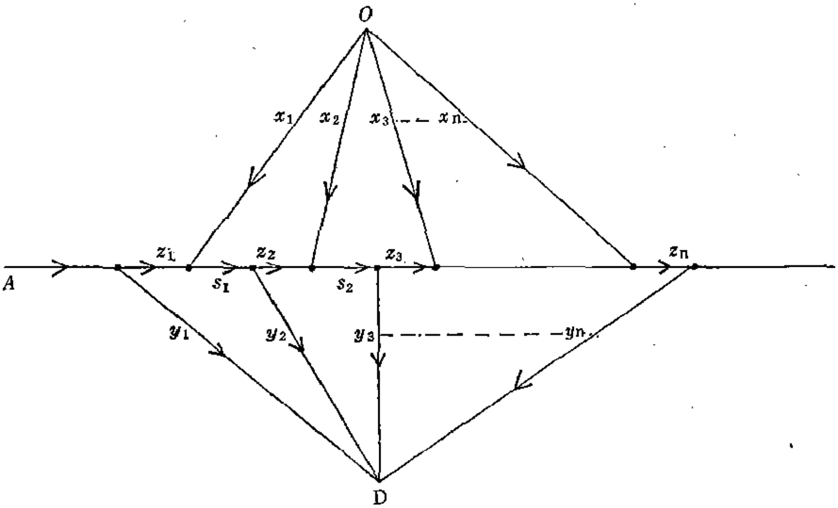

図 7—1

以上の制約条件のもとで，利潤をあらわす目的関数

$$(7\text{–}6)\qquad \Pi=\sum_{i=1}^{n}(p_iy_i-c_ix_i-r_iz_i)$$

を最大にする。これが本節におけるわれわれのモデルの原型である。

なお，この原型モデルをネットワーク・フロー（network flow）として視覚的に示せば図 7–1 のようになる。横線は倉庫を意味し，左から右への時間の流れに沿って，倉庫の位置を仮設的にずらしている。点 O は製品の購入先，点 D は販売先を示すものとする。

容易に気付くことであるが，上記の問題で変数のいくつかは消去され得る。変数の消去をほどこすことによって問題を縮小させてみよう。（7–3）の s_i を（7–1）と（7–4）に代入し整理すれば，

$$(7\text{–}7)\qquad \begin{cases} z_i=z_{i-1}+x_{i-1}-y_i & i=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \mathrm{n} \\ z_1=A-y_1 & \\ z_i+x_i\leqq B & i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \\ x_i\geqq 0,\ y_i\geqq 0,\ z_i\geqq 0 & i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \end{cases}$$

を得るが，制約条件（7–1）～(7–5) と（7–7）は明らかに同値でなければならない。

次に（7–7）の最初の２つの式より，z_i を

$$(7\text{–}8)\qquad \begin{cases} z_i=A+\sum_{j=1}^{i-1}x_j-\sum_{j=1}^{i}y_j & i=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n \\ z_1=A-y_1 & \end{cases}$$

として他の変数 x_j と y_j であらわすことができる。したがってまた，z_i を消去することによって，(7–7）は次のような制約条件のシステムに変形され，しかもそれら２つの条件システムは同値である。

$$(7\text{–}9)\qquad \begin{cases} A+\sum_{j=1}^{i-1}x_j-\sum_{j=1}^{i}y_j\geqq 0 & i=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n \\ A-y_1\geqq 0 & \\ A+\sum_{j=1}^{i}(x_j-y_j)\leqq B & i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \\ x_i\geqq 0,\ y_i\geqq 0 & i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \end{cases}$$

他方，目的関数 (7–6) は，(7–8) による z_i の消去によって，

$$
\begin{aligned}
(7\text{–}10)\qquad \Pi =\;& (p_1+\sum_{j=1}^{n} r_j)y_1+(p_2+\sum_{j=2}^{n} r_j)y_2+\cdots\cdots+(p_{n-1}+\sum_{j=n-1}^{n} r_j)y_{n-1} \\
& +(p_n+r_n)y_n \\
& -\Big[(c_1+\sum_{j=2}^{n} r_j)x_1+(c_2+\sum_{j=3}^{n} r_j)x_2+\cdots\cdots+(c_{n-1}+r_n)x_{n-1}+c_nx_n\Big] \\
& -A\sum_{i=1}^{n} r_i \\
=\;& \sum_{i=1}^{n}(p_i+\sum_{j=i}^{n} r_j)y_i-\sum_{i=1}^{n-1}(c_i+\sum_{j=i+1}^{n} r_j)x_i-c_nx_n-A\sum_{i=1}^{n} r_i \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

とあらわされることになる。

結局，標準的な倉庫問題に倉庫費用を考慮したわれわれの拡張モデルは，その原型モデル (7–1)～(7–6) と同値関係にある (7–9)～(7–10) のように定式化されることが示された。

この拡張された一般的なモデル (7–9) ～ (7–10) はその特殊ケースとして Cahn の標準的なモデルを含むことは容易に証明される。まず，制約条件 (7–9) は (2–1)～(2–4) とまったく同じものである。そして，$r_i=0$ ($i=1, 2, \ldots\ldots, n$) とおけば (7–10) は (2–5) に帰着される。したがって，標準的な倉庫問題 (2–1)～(2–5) は，一般的なモデル (7–9)～(7–10) において倉庫費用をゼロとする特殊ケースであることが示された。

われわれの一般化されたモデルと標準的な倉庫モデルとの形式的な相違点は目的関数にのみ見られる。すなわち，目的関数において変数の係数が異なる点だけが2つのモデルにおける違いである[12]。このことを考慮すれば，一般化されたモデルを解くには，既に説明した Charnes–Cooper の解法あるいは Bellman の動的計画法をそのまま適用すればよいことがわかるだろう。

(7–9)～(7–10) に対する双対問題を得るのは容易である。(3–1)～(3–5) をみることによって双対問題は以下のようになる。

12) (7—10) には $-A\sum_{i=1}^{n}r_i$ がついているが，これは定数項であるから，最大化の中では問題にならない。

$$
(7\text{–}11)\quad
\begin{cases}
\sum_{i=k}^{n} u_i - \sum_{i=k+1}^{n} v_i \geqq -(c_k + \sum_{i=k+1}^{n} r_j) & k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1 \\
u_n \geqq -c_n & \\
-\sum_{i=k}^{n} u_i + \sum_{j=k}^{n} v_i \geqq p_k + \sum_{j=k}^{n} r_j & k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \\
u_k \geqq 0,\ v_k \geqq 0 & k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \\
Z=(B-A)\sum_{i=1}^{n} u_i + A\sum_{i=1}^{n} v_i \rightarrow \min &
\end{cases}
$$

(4–1), (4–2) による変数変換を施せば，(7–11) はそれと同値な次の問題に変形される。

$$
(7\text{–}12)\quad
\begin{cases}
U_k - V_{k+1} \geqq -(c_k + \sum_{j=k+1}^{n} r_j) & k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1 \\
U_n \geqq -c_n & \\
-U_k + V_k \geqq p_k + \sum_{j=k}^{n} r_j & k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \\
U_{k-1} \geqq U_k,\ V_{k-1} \geqq V_k & k=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n \\
U_k \geqq 0,\ V_k \geqq 0 & k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n \\
Z=(B-A)U_1 + AV_1 \rightarrow \min &
\end{cases}
$$

(7–12) の問題と (4–3)〜(4–8) の問題をくらべることによって，(7–12) の解を得る手順は (4–11)〜(4–14) の手順の右辺を若干変えるだけでよいことがわかる。そこで，(7–12) の最適解は

$$
(7\text{–}13)\quad
\begin{cases}
U_n = \max(-c_n,\ 0) & \\
V_n = \max(U_n + p_n + r_n,\ 0) & \\
U_k = \max\left[V_{k+1} - (c_k + \sum_{j=k+1}^{n} r_j),\ U_{k+1},\ 0\right] & \\
 & k=n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots,\ 1 \\
V_k = \max(U_k + p_k + \sum_{j=k}^{n} r_j,\ V_{k+1},\ 0) & k=n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots,\ 1
\end{cases}
$$

という再帰的な手順で決定される。

双対問題の最適解が得られると，(4–16) とまったく同様にして，もとの問

題 (7-9)～(7-10) の最適解を得ることができる。

VIII おわりに

標準的な倉庫問題は本質的に多段階決定問題であり，したがって，その解法も必然的に逐次決定過程の形をとる。Charnes-Cooper の解法も動的計画法による解法もともに各段階ごとの逐次的なプロセスをたどるものである。

倉庫問題の最適決定の構造についての考察から，最適決定について (5-3)～(5-4) の特徴がみられる。

倉庫費用を導入することによってモデルを拡張し，その解法は Charnes-Cooper の解法，動的計画法による解法を容易に適用し得ることが示された。

参考文献

〔1〕 Ackoff, R. L., ed., *Progress in Operations Research*, Vol. I, John Wiley & Sons, 1961.

〔2〕 Bellman, R., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, 1957.

〔3〕 ______, "On the Theory of Dynamic Programming", *Management Science*, 2 (1956).

〔4〕 Cahn, A. S., "The Warehouse Problem", *Bulletin of American Mathematical Society*, 54 (1948).

〔5〕 Charnes, A. & W. W. Cooper, "Duality, Regrouping and Warehousing", *ONR Research Memo*. 19, Carnegie Institute of Technology, June 1954.

〔6〕 ______, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, John Wiley & Sons, 1961.

〔7〕 Garvin, W. W., *Introduction to Linear Programming*, McGraw-Hill, 1960.

〔8〕 Vajda, S., *Readings in Linear Programming*, John Wiley & Sons, 1958.